Bruchterme

Terme mit mindestens einem Nenner, in dem sich eine Variable befindet, heißen **Bruchterme**.

Beispiele: $\frac{7x+9}{2x+3}$, $3+\frac{1}{x}+x^2$ oder $\frac{ax+by}{cx^2+dy^2}$.

Der **Zählerterm** ist der Ausdruck im Bruch oberhalb, der **Nennerterm** liegt unterhalb des Bruchstrichs.

1. Grundmenge und Definitionsmenge

Enthält der Bruchterm nur eine Variable, dann versteht man unter der **Grundmenge G** diejenige Zahlenmenge, die für die Belegung der Variablen zugelassen ist. Die Grundmenge ist in der Regel vorgegeben, meistens handelt es sich dabei um die Menge der rationalen Zahlen ($G=\mathbb{Q}$) oder die der reellen Zahlen ($G=\mathbb{R}$).

Die **maximale Definitionsmenge $\mathbf{D_{max}}$** enthält nur die Zahlen aus der Grundmenge, mit denen der zugehörige Wert des Terms auch tatsächlich berechnet werden kann. D_{max} erhält man bei Bruchtermen, indem man diejenigen Zahlen der Grundmenge streicht, für die der Nenner den Wert Null annimmt. Im Bruchterm

$$\frac{2x+3}{2x+4}$$

beispielsweise würde der Nenner für $x=-2$ den Wert Null annehmen, so dass diese Zahl auszuschließen ist: Hier ist $D_{max}=\mathbb{R}\setminus\{-2\}$ über der Grundmenge $G=\mathbb{R}$.

2. Erweitern

Zähler und Nenner eines Bruchterms können mit dem gleichen Faktor ungleich Null multipliziert werden. Dies nennt man **Erweitern**.

$$\frac{x+1}{x+2}=\frac{(x+1)\cdot(x-1)}{(x+2)\cdot(x-1)}=\frac{x^2-1}{x^2+x-2}$$

3. Kürzen

Beim **Kürzen** als Umkehrung des Erweiterns können Zähler und Nenner durch den selben Ausdruck ungleich Null geteilt werden. Möglicherweise muss wie im Beispiel zuerst in Faktoren zerlegt werden, bevor gekürzt werden kann, hier durch $(k-2)$.

$$\frac{k^2-2k}{3k-6}=\frac{k\cdot(k-2)}{3\cdot(k-2)}=\frac{k}{3}$$

4. Multiplikation

Bruchterme werden **multipliziert**, indem man Zähler mit Zähler und Nenner mit Nenner multipliziert.

$$\frac{a+1}{a}\cdot\frac{a-2}{2}=\frac{(a+1)\cdot(a-2)}{2\cdot a}=\frac{a^2-a-2}{2a}$$

5. Division

Durch einen Bruchterm **teilen** wir, indem wir mit dessen Kehrbruch multiplizieren. Der Zähler und der Nenner des Divisors werden hier vertauscht.

$$\frac{s+1}{s+3} : \frac{s-1}{s+2} = \frac{s+1}{s+3} \cdot \frac{s+2}{s-1} = \frac{(s+1)(s+2)}{(s+3)(s-1)} = \frac{s^2+3s+2}{s^2+2s-3}$$

6. Addition/Subtraktion gleichnamiger Bruchterme

Bruchterme mit gleichem Nenner (auch **gleichnamige Bruchterme** genannt) können auf einem Bruchstrich **addiert** bzw. **subtrahiert** werden, indem man die Zähler addiert und den gleichen Nenner beibehält.

$$\frac{2}{x^2-1} - \frac{2x-3}{x^2-1} = \frac{2-(2x-3)}{x^2-1} = \frac{-2x+5}{x^2-1}$$

7. Hauptnenner (HN)

Bruchterme können stets durch geeignetes Erweitern gleichnamig gemacht, das heißt auf denselben Nenner erweitert werden. Der einfachste mögliche Nenner wird dabei **Hauptnenner** genannt.

$$\frac{3}{4x} \text{ und } \frac{2x+1}{10(2x+3)}$$

besitzen den Hauptnenner $20 \cdot x \cdot (2x+3) = 20 \cdot (2x^2 + 3x)$.

8. Addition/Subtraktion ungleichnamiger Bruchterme

Bruchterme mit unterschiedlichen Nennern müssen erst auf den **Hauptnenner** erweitert werden, bevor sie **addiert/subtrahiert** werden können.

$$\frac{3x+3}{5x-5} + \frac{x+2}{5x+10}$$

$$= \frac{3x+3}{5(x-1)} + \frac{x+2}{5(x+2)} \text{ Nenner faktorisieren}$$

$$= \frac{(3x+3)(x+2)}{5(x-1)(x+2)} + \frac{(x+2)(x-1)}{5(x-1)(x+2)} \text{ auf HN erweitern}$$

$$= \frac{(3x+3)(x+2)+(x+2)(x-1)}{5(x-1)(x+2)} \text{ auf einen Bruch schreiben}$$

$$= \frac{3x^2+6x+3x+6+x^2-x+2x-2}{5(x-1)(x+2)} \text{ ausmultiplizieren}$$

$$= \frac{4x^2+10x+4}{5(x-1)(x+2)} \text{ Zähler vereinfachen}$$