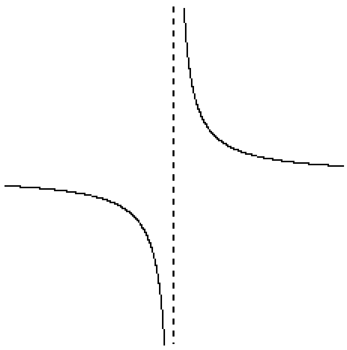
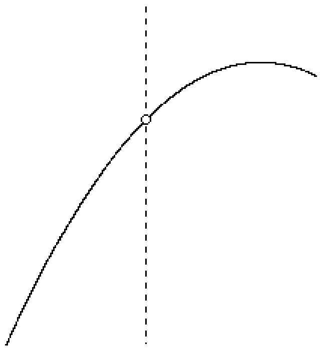
Gebrochen-rationale Funktionen • Definitionslücken

Wir untersuchen $f(x)=\frac{\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}}{\frac{1}{3}x^2+\frac{1}{3}x-\frac{2}{3}}$ an den Definitionslücken.

$$f(x)=\frac{\frac{1}{2}(x-1)}{\frac{1}{3}(x+2)(x-1)} \Rightarrow D_{max}=\mathbb{R}\setminus\{-2;1\}$$

In Bezug auf gebrochen-rationale Funktionen unterscheiden wir zwei Arten an Definitionslücken:

Unendlichkeitsstelle/Polstelle	**Hebbare Definitionslücke**
f nimmt in der Nähe einer **Polstelle** betragsmäßig immer größere Funktionswerte an.	„Loch“ im Graphen
	
Vielfachheit der Nullstelle im Nenner ist größer als die im Zähler. Die Differenz der Vielfachheiten nennen wir **Ordnung** der Polstelle.	Vielfachheit Nullstelle im Nenner $\leq$ Vielfachheit der Nullstelle im Zähler.

$$f(x)=\frac{\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}}{\frac{1}{3}x^2+\frac{1}{3}x-\frac{2}{3}}=\frac{\frac{1}{2}(x-1)}{\frac{1}{3}(x+2)(x-1)}$$

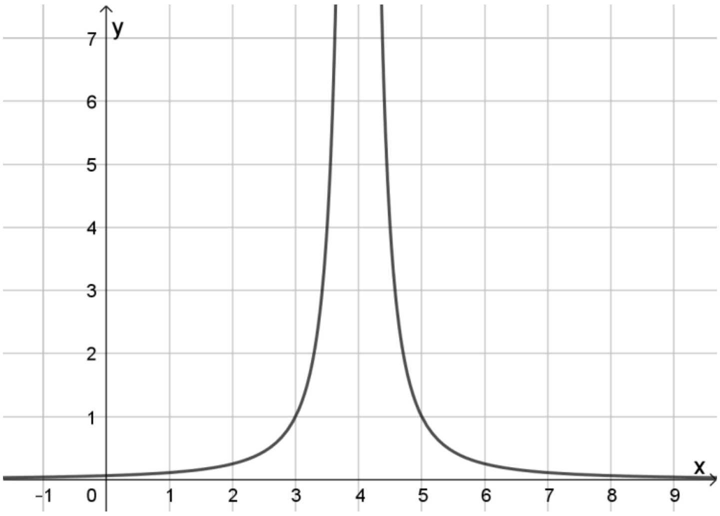
besitzt bei $x_1=-2$ eine Polstelle 1. Ordnung
und bei $x_2=1$ eine hebbare Definitionslücke.

Besitzt die Funktion f eine hebbare Definitionslücke, so erhalten wir die **stetige Fortsetzung** $\tilde{f}$ von f, indem wir den entsprechenden Linearfaktor wegkürzen. Die Graphen von $\tilde{f}$ und f unterscheiden sich dann lediglich um das jeweilige Loch.

Für das obere Beispiel ist der Term der stetigen Fortsetzung $\tilde{f}(x)=\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{3}(x+2)}$.

Weitere Beispiele für Definitionslücken:

1. $g(x) = \frac{(x-4)^3}{(x-4)^5}$ hat einen Pol der Ordnung $5 - 3 = 2$ bei $x_0 = 4$. Der Funktionsterm kann durch Kürzen noch zu $g(x) = \frac{1}{(x-4)^2}$ vereinfacht werden. Wegen der geraden Ordnung der Polstelle findet kein Vorzeichenwechsel statt, die beiden Äste des Graphen zeigen hier nach oben.



2. $h(x) = \frac{(x+1)^3}{(x+1)^2}$ hebbare Definitionslücke bei $x_0 = -1$. Die stetige Fortsetzung von h lautet $\tilde{h}(x) = x + 1$. Es handelt sich beim Graphen G_h um eine Gerade mit einem Loch bei $x_0 = -1$.