# Bernoulli-Ketten
# Übung

1. In einer Urne befinden sich 3 weiße und 4 schwarze Kugeln. Es werden 12 Kugeln mit Zurücklegen gezogen. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit folgender Ereignisse auf fünf Nachkommastellen gerundet.

   A: „Es werden genau 5 weiße Kugeln gezogen“
   B: „Höchstens eine weiße“
   C: „Mindestens 10 weiße“
   D: „Alle entnommenen Kugeln sind weiß“
   E: „Mindestens eine weiße“
   F: „Genau die erste, dritte und 7. Kugel sind weiß“
   G: „Genau vier weiße, diese werden direkt hintereinander gezogen“

2. Mit einem sechsseitigen Würfel wird zehnmal gewürfelt. Bestimmen Sie, zum Beispiel mit Hilfe eines Tafelwerks, die Wahrscheinlichkeiten der gegebenen Ereignisse.

   A: „Bei zehn Würfen fällt genau zweimal die Sechs“
   B: „höchstens sechsmal eine gerade Zahl“
   C: „Zwischen 2 und vier Sechsen“
   D: „Mehr als dreimal eine Augenzahl von höchstens zwei“

3. In einer Urne befinden sich drei blaue und zwei rote Kugeln. Es wird 8-mal eine Kugel gezogen. Nach jedem Durchgang wird die gezogene Kugel wieder in die Urne zurückgelegt.

   Entscheiden Sie, für welches der aufgeführten Ereignisse der Term

   $$\binom{8}{a} \cdot b^2 \cdot 0{,}4^c$$

   die Wahrscheinlichkeit angeben kann.

   Bestimmen Sie für diesen Fall die fehlenden Parameter a, b und $c \in \mathbb{R}$ so, dass die Formel auch tatsächlich korrekt ist.

   - Genau fünfmal wird eine rote Kugel gezogen
   - Höchstens zweimal wird eine blaue Kugel gezogen
   - Mehr als dreimal wird eine rote Kugel gezogen
   - Genau zweimal wird eine blaue Kugel gezogen
   - Mindestens dreimal wird eine blaue Kugel gezogen

4. Ein Karton enthält 20 Konservendosen. Jede einzelne Dose ist zu $p = 2\%$ beschädigt. Formulieren Sie Ereignisse mit Worten, die zu den folgenden Rechenausdrücken passen.

$P(A) = \binom{20}{5} \cdot 0{,}02^5 \cdot 0{,}98^{15}$
$P(B) = 0{,}98^{20}$
$P(C) = \binom{20}{1} \cdot 0{,}02^1 \cdot 0{,}98^{19} + \binom{20}{2} \cdot 0{,}02^2 \cdot 0{,}98^{18}$
$P(D) = 18 \cdot 0{,}02^3 \cdot 0{,}98^{17}$
$P(E) = 0{,}02^2 \cdot 0{,}98^{18}$
$P(F) = 1 - 0{,}98^{20}$

5. Aus einer Urne mit einer weißen und einer unbekannten Anzahl schwarzer Kugeln wird mit einer Wahrscheinlichkeit von $\frac{729}{4096}$ beim sechsmaligen Ziehen keine weiße Kugel gezogen. Ermitteln Sie rechnerisch die Anzahl der schwarzen Kugeln.

**Bernoulli-Ketten**
**Lösung**

1. $P(A) = B\left(12; \frac{3}{7}; 5\right) = \binom{12}{5} \cdot \left(\frac{3}{7}\right)^5 \cdot \left(\frac{4}{7}\right)^7 \approx 0{,}22781$
   $P(B) = \sum_{i=0}^{1} B\left(12; \frac{3}{7}; i\right) = \left(\frac{4}{7}\right)^{12} + \binom{12}{1} \cdot \left(\frac{3}{7}\right)^1 \cdot \left(\frac{4}{7}\right)^{11} \approx 0{,}01212$
   $P(C) = \sum_{i=10}^{12} B\left(12; \frac{3}{7}; i\right) \approx 0{,}00516$
   $P(D) = \left(\frac{3}{7}\right)^{12} \approx 0{,}00004$
   $P(E) = 1 - P(\text{"Keine weiße"}) = 1 - \binom{12}{0} \cdot \left(\frac{3}{7}\right)^0 \cdot \left(\frac{4}{7}\right)^{12} \approx 0{,}99879$
   $P(F) = \left(\frac{3}{7}\right)^3 \cdot \left(\frac{4}{7}\right)^9 \approx 0{,}00051$
   $P(G) = 9 \cdot \left(\frac{3}{7}\right)^4 \cdot \left(\frac{4}{7}\right)^8 \approx 000345$

2. $P(A) = B\left(10; \frac{1}{6}; 2\right) \approx 0{,}29071$
   $P(B) = \sum_{i=0}^{6} B\left(10; \frac{1}{2}; i\right) \approx 0{,}82813$
   $P(C) = \sum_{i=0}^{4} B\left(10; \frac{1}{6}; i\right) - \sum_{i=0}^{1} B\left(10; \frac{1}{6}; i\right) \approx 0{,}98454 - 0{,}48452 = 0{,}50002$
   $P(D) = 1 - P(\text{"höchstens zwei Einsen oder Zweier"}) = 1 - \sum_{i=0}^{2} B\left(10; \frac{1}{3}; i\right)$
   $\approx 1 - 0{,}29914 = 0{,}70086$

3. Richtig ist das vierte Ereignis „Genau zweimal wird eine blaue Kugel gezogen“.
   Die Parameter lauten $a = 2$, $b = 0{,}6$ und $c = 6$.

4. A: „Genau fünf der 20 Dosen sind beschädigt“
   B: „Keine Dose ist beschädigt“
   C: „Eine oder zwei Dosen sind beschädigt“
   D: „Genau drei Dosen beschädigt, diese werden direkt nacheinander kontrolliert“
   E: „Nur die ersten beiden Dosen sind beschädigt“
   F: „Mindestens eine ist beschädigt“

5. p soll die Wahrscheinlichkeit für das Ziehen der weißen Kugel sein.
   $B(6; p; 0) = \frac{729}{4096}$
   $\binom{6}{0} \cdot p^0 \cdot (1-p)^6 = \frac{729}{4096}$
   $(1-p)^6 = \frac{729}{4096}$
   $(1-p) = \frac{3}{4}$
   $p = \frac{1}{4}$,
   es befinden sich folglich eine weiße und drei schwarze Kugeln in der Urne.