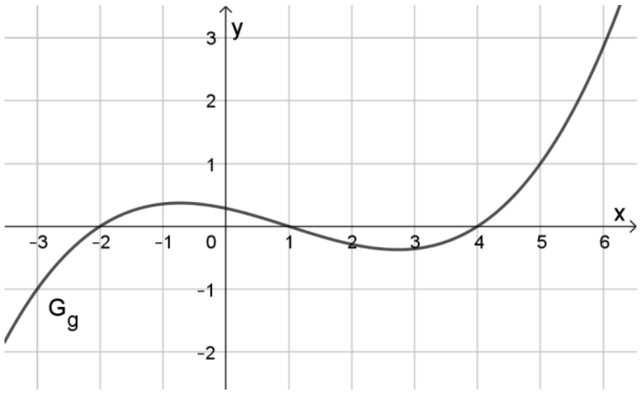
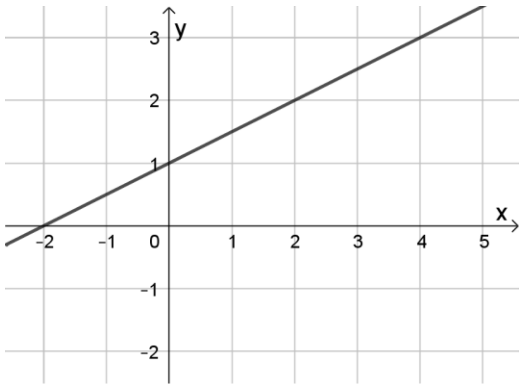
Funktionen der Form $\mathbf{f(x) = \ln\big(g(x)\big)}$
Übung

1. In unterem Bild ist der Graph der Funktion g mit der Definitionsmenge $D_g = \mathbb{R}$ zu sehen. Dazu wird nun die Funktion $f(x) = \ln\big(g(x)\big)$ betrachtet. Geben Sie ohne Rechnung die maximale Definitionsmenge D_f sowie die Nullstelle der Funktion f an.

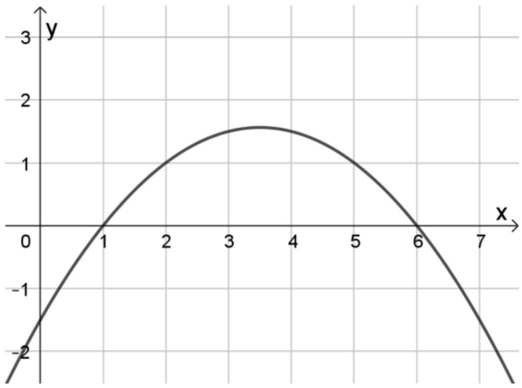


2. Zeichnen Sie den jeweils den Graphen von $f(x) = \ln\big(g(x)\big)$ ein, wenn der Graph von g abgebildet ist.

a)



b)



3. Bestimmen Sie die Extremstellen der Funktion $f(x) = \ln\big(g(x)\big)$.

   a) $g(x) = x^2 - 1$

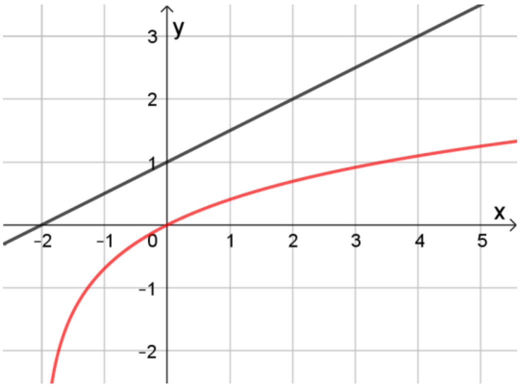
   b) $g(x) = -x^2 + 4x$

4. Zeigen Sie allgemein: Die Funktionen $g(x)$ und $f(x) = \ln\big(g(x)\big)$ besitzen dieselben Extremstellen in der gemeinsamen Definitionsmenge!

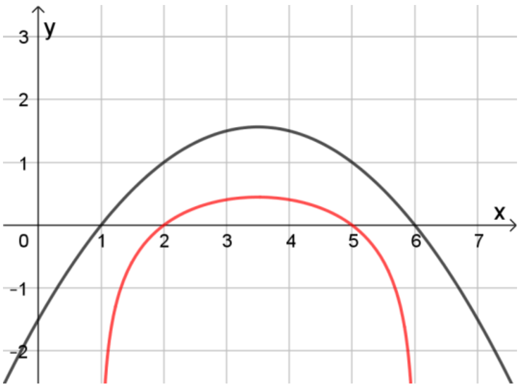
Funktionen der Form $f(x) = \ln(g(x))$
Lösung

1. Bemerkung: Es ist $g(x) = \frac{1}{28}(x+2)(x-1)(x-4)$.
   Die maximale Definitionsmenge von f liegt dort, wo sich der Graph von g oberhalb der x-Achse befindet, also $D_f =]-2; 1[\cup]4; \infty[$.
   Die Nullstelle von f befindet sich wegen $g(5) = 1$ bei $x_1 = 5$.

2.
   a)



   b)



3.
   a) $f(x) = \ln(x^2 - 1)$
   $f'(x) = \frac{1}{x^2-1} \cdot 2x = \frac{2x}{x^2-1}$
   $f'(x) = 0$ für $x_1 = 0$
   Allerdings ist $g(0) = 0$, d.h. $x_1 = 0$ liegt nicht in der Definitionsmenge von f
   f besitzt daher keine Extremstellen

   b) $f(x) = \ln(-x^2 + 4x)$
   $f'(x) = \frac{1}{-x^2+4x} \cdot (-2x + 4) = \frac{-2x+4}{-x^2+4x}$
   $f'(x) = 0$ für $x_1 = 2$

x	$x < 2$	$x > 2$
$f'(x)$	$+$	$-$
G_f	↗	↘

   f besitzt ein lokales Maximum bei $x_1 = 2$.

4.

- In der gemeinsamen Definitionsmenge muss gelten $g(x) > 0$.
- Es ist $f'(x) = \frac{1}{g(x)} \cdot g'(x) = \frac{g'(x)}{g(x)}$.
- Die Ableitungen $g'(x)$ und $f'(x) = \frac{g'(x)}{g(x)}$ besitzen dieselben Nullstellen sowie wegen $g(x) > 0$ überall dieselben Vorzeichen.