Ganzrationale Funktionen • Anwendungen (Insel)
Übung

Der Querschnitt zweier Inseln über beziehungsweise unter dem Meeresspiegel wird annähernd durch die Funktion

$$f(x) = \frac{-3}{44}\,x\,(x^3 - 17x^2 + 87x - 135)$$

mit Definitionsmenge $D = [0; 9]$ beschrieben. Dabei entspricht eine Einheit in x-Richtung 100 m und f(x) der Höhe über dem Meeresspiegel in Meter. Ein Überlebender einer Flugzeugkatastrophe ist unverletzt auf der vom Betrachter aus linken der beiden Inseln bei $x_0 = 1$ gelandet.

a) Berechnen Sie die aktuelle Höhe des Gestrandeten an der Stelle $x_1 = 1$ über dem Meer. Zeigen Sie, dass die Insel, auf der er sitzt, eine Breite von 300 m besitzt.

b) Auf der Insel des Überlebenden gibt es kein Trinkwasser, so dass er zu verdursten droht. Beurteilen Sie seine kurzfristigen Überlebenschancen für den Fall, dass es auf der anderen Insel eine Süßwasserquelle gibt.

c) Zeigen Sie: Der höchste Punkt der zweiten Insel liegt etwa bei $x_2 = 7{,}63$. Berechnen Sie die Höhe dieser Insel über dem Meeresspiegel.

Ganzrationale Funktionen • Anwendungen (Insel)
Lösung

a) $f(1) \approx 4{,}36$; der Überlebende sitzt rund 4,36 m über dem Meer.
Nach Angabe ist $f(3) = 0$, daher muss folgende Polynomdivision aufgehen:

$$(x^3 - 17x^2 + 87x - 135):(x-3) = x^2 - 14x + 45$$

Es ist $f(x) = \frac{-3}{44}x(x-3)(x^2-14x+45) = \frac{-3}{44}x(x-3)(x-5)(x-9)$.
Die beiden kleinsten Nullstellen sind bei $x_1 = 0$ und $x_2 = 3$ und $f(x) \geq 0$ für $x \in [0;3]$, die linke Insel ist damit 300 m breit.

b) Die weiteren beiden Nullstellen von $f(x) = \frac{-3}{44}\,x\,(x-3)(x-5)(x-9)$ liegen bei $x_3 = 5$ und $x_2 = 9$, so dass die beiden Inseln 200 m entfernt liegen. Die Überlebenschancen sind damit kurzfristig sehr gut, da es sich um eine schwimmbare Entfernung handelt. [Bemerkung: Der tiefste Punkt zwischen den beiden Inseln liegt bei $x_5 \approx 4{,}02$ in einer Tiefe von rund 1,36 m, man müsste daher nicht einmal zur anderen Insel schwimmen können.]

c) $f(x) = \frac{-3}{44}\,(x^4 - 17x^3 + 87x^2 - 135x)$
$f'(x) = \frac{-3}{44}\,(4x^3 - 51x^2 + 174x - 135)$
$f''(x) = \frac{-3}{44}\,(12x^2 - 102x + 174)$
$f'(7{,}63) \approx -0{,}02$, also etwa null.
$f''(7{,}63) \approx -6{,}43$, an dieser Stelle liegt ein Hochpunkt.
$f(7{,}63) \approx 8{,}68$, die Höhe dieses Punkt leigt bei rund 8,68 m über dem Meer.