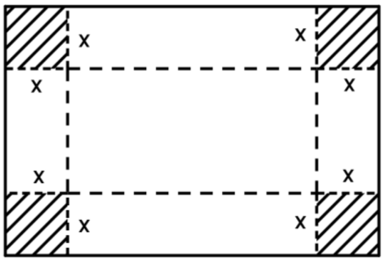
Ganzrationale Funktionen • Optimierung
Übung

1. Aus einem rechteckigen Karton mit den Seitenlängen 40 cm bzw. 60 cm soll eine oben offene, quaderförmige Schachtel mit möglichst großem Inhalt gebastelt werden. Dazu werden an den vier Ecken Quadrate der Kantenlänge x abgeschnitten und die verbleinenden Seiten nach oben geknickt. Bestimmen Sie den maximalen Inhalt der Box.



2. Mit einem Seil der Länge 20 m wird ein Rechteck gelegt. Wie müssen die Seitenlängen des Rechtecks gewählt werden, damit das Rechteck einen größtmöglichen Inhalt erhält?

3. An einer Mauer soll ein Zaun mit der Länge 200 m zu einem Rechteck mit größtmöglichem Flächeninhalt aufgestellt werden. Wie sind die Seiten des Rechtecks zu wählen?

4. Ein Rechteck liegt so im kartesischen Koordinatensystem, dass eine Seite des Rechtecks auf der x-Achse liegt, die andere auf der y – Achse. Ein Eck des Rechtecks liegt auf dem Koordinatenursprung, das diagonal gegenüberliegende Eck liegt im I. Quadranten auf dem Graphen der Funktion $f: x \mapsto -\frac{1}{9}x^2 + 3$. Berechnen Sie die Seiten des Rechtecks so, dass es eine möglichst große Fläche einschließt.

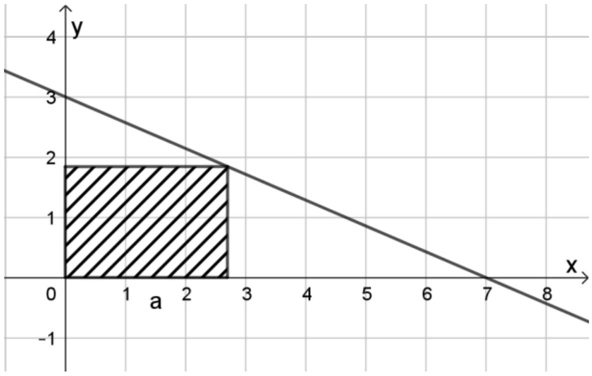
5. Aus einem Draht mit Länge 36 cm soll ein Quadergerüst mit quadratischer Grundfläche gebogen werden. Welche Kantenlängen muss der Quader haben, damit sein Volumen maximal wird?

6. Einer Kugel mit Radius $R = 10$ cm soll ein Zylinder mit maximalem Volumen einbeschrieben werden. Geben Sie die Höhe h und den Radius r des Zylinders auf zwei Nachkommastellen gerundet an!

7. In einer Turmspitze, die die Form eines geraden Kreiskegels mit Höhe $H = 5$ m und Bodendurchmesser $D = 6$ m hat, soll ein zylinderförmiges Zimmer mit größtmöglichem Rauminhalt eingebaut werden. Welche Maße muss dieses Zimmer haben?

8. Ein oben offener, zylinderförmiger Papierkorb soll größtmögliches Fassungsvermögen bei einem Materialaufwand von 40 dm^2 besitzen. Welchen Radius r und welche Höhe h muss der Papierkorb besitzen?

9. Aus einem rechtwinkligen Dreieck mit den Katheten 3 und 7 soll ein möglichst großes Rechteck ausgeschnitten werden, vgl. untere Skizze. Die Breite des Rechtecks wird mit a bezeichnet.

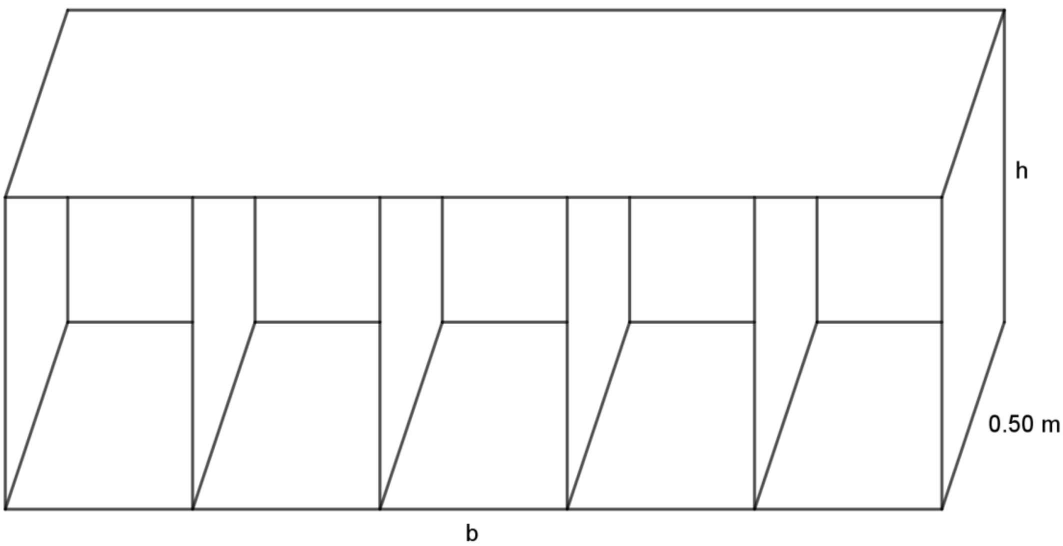


a) Zeigen Sie, dass das Dreieck in Abhängigkeit von der unteres Seite a den Flächeninhalt $A(a) = -\frac{3}{7}a^2 + 3a$ besitzt. Legen Sie einen sinnvollen Definitionsbereich D_A für $A(a)$ fest.

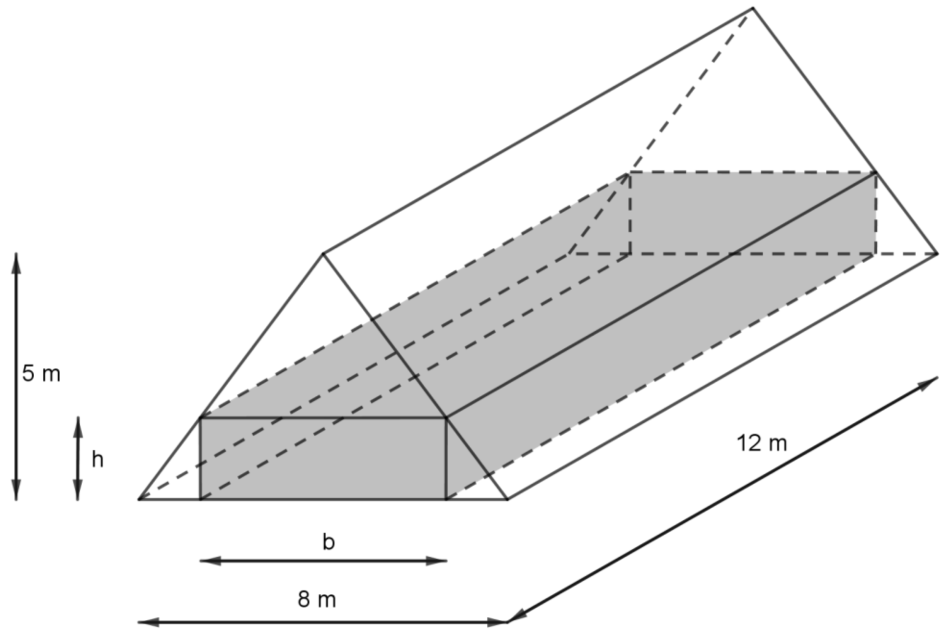
b) Berechnen Sie die Flächeninhalte des Rechtecks für $a = 1$ und für $a = 5$.

c) Ermitteln Sie den Wert von a, so dass der Inhalt des Rechtecks maximal wird. Geben Sie diesen maximalen Wert an.

10. Aus einem Brett der Länge 5 m und der Breite 0,50 m soll ein Regal mit fünf Fächern gebaut werden. Wie sind die Breite b und die Höhe h des Regals zu wählen, damit ein möglichst großes Volumen entsteht? Die Dicke des Brettes soll dabei vernachlässigt werden.
[Zwischenergebnis: Das von h abhängige Volumen des Regals beträgt
$V(h) = -1{,}5h^2 + 1{,}25h$]



11. Unter ein Satteldach soll ein Dachboden eingebaut werden. Die Grundfläche des quaderförmigen Hauses ist 8 m breit und 12 m lang, der Querschnitt des Dachs ein gleichschenkliges Dreieck mit einer Höhe von 5 m. Das eingebaute Zimmer mit der Breite b und der Höhe h soll quaderförmig werden (siehe Abbildung). Für alle folgenden Rechnungen wird auf Einheiten verzichtet.



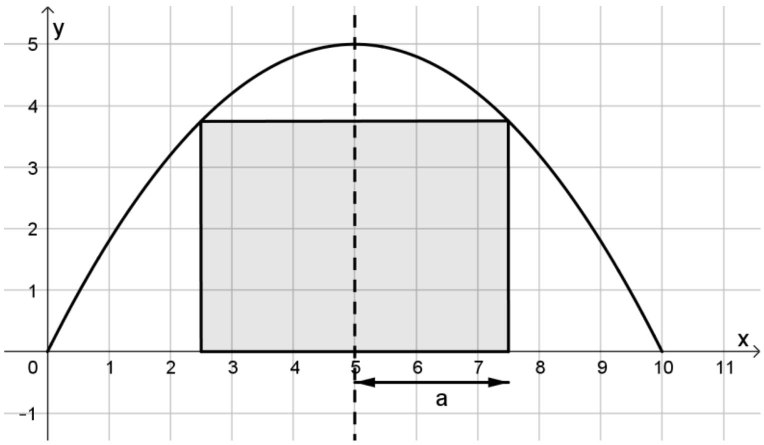
a) Zeigen Sie: Für das Volumen des grau markierten Zimmers gilt in Abhängigkeit von seiner Breite b

$$V(b) = -\frac{15}{2}b^2 + 60b.$$

Bestimmen Sie eine sinnvolle Definitionsmenge D_V für diese Funktion.

b) Berechnen Sie, wie müssen die Breite b und die Höhe h des Zimmers gewählt werden müssen, damit das Volumen des Zimmers möglichst groß wird? Geben Sie für diesen Fall das Volumen des Raumes an!

12. In einen parabelförmigen Torbogen mit der Breite 10 m und der Höhe 5 m soll eine rechteckige Leinwand eingepasst werden (vergleiche Skizze).



a) Zeigen Sie, dass der Torbogen durch den Funktionsterm $f(x) = -\frac{1}{5}(x^2 - 10x)$ beschrieben werden kann.

b) Geben Sie die Fläche A der Leinwand in Abhängigkeit von Ihrer halben Breite a an sowie eine geeignete Definitionsmenge D_A.
[Teilergebnis: $A(a) = -0{,}4a^3 + 10a$]

c) Berechnen Sie $A(2)$ und interpretieren Sie Ihr Ergebnis.

d) Bestimmen Sie a so, dass die Leinwand maximale Fläche erhält.

Ganzrationale Funktionen • Optimierung
Lösung

1.	Hauptbedingung	$V(x) = (40 - 2x) \cdot (60 - 2x) \cdot x = 4x^3 - 200x^2 + 2400x$
	Nebenbedingung	- (keine Nebenbedingung nötig)
	Zielfunktion	$V(x) = 4x^3 - 200x^2 + 2400x$
	Definitionsmenge	$D_V = [0; 20]$
	Lösung	$x_1 = \frac{50-\sqrt{700}}{3} \approx 7{,}85$; das maximale Volumen beträgt ca. $8450{,}45\ \text{cm}^3$

2.	Hauptbedingung	$A = a \cdot b$
	Nebenbedingung	$2a + 2b = 20$ (Gesamtlänge des Seils) $\Rightarrow b = 10 - a$
	Zielfunktion	$A(a) = a(10 - a) = -a^2 + 10a$
	Definitionsmenge	$D_A = [0; 10]$
	Lösung	$a = 5$ und $b = 5$; das Rechteck ist ein Quadrat

3.	Hauptbedingung	$A = a \cdot b$
	Nebenbedingung	$2a + b = 200$ (Gesamtlänge des Zauns) $\Rightarrow b = 200 - 2a$
	Zielfunktion	$A(a) = 200a - 2a^2$
	Definitionsmenge	$D_A = [0; 100]$
	Lösung	$a = 50; b = 100$

4.	Hauptbedingung	$A(a) = a \cdot f(a)$
	Nebenbedingung	- (ohne Nebenbedingung)
	Zielfunktion	$A(a) = -\frac{1}{9}a^3 + 3a$
	Definitionsmenge	$D_A = [0; 3\sqrt{3}]$
	Lösung	$a = 3; f(a) = 2; A_{max} = 6$

5.	Hauptbedingung	$V = a^2 \cdot h$
	Nebenbedingung	$8a + 4h = 36$ (Gesamtlänge Draht) $\Rightarrow h = 9 - 2a$
	Zielfunktion	$V(a) = 9a^2 - 2a^3$
	Definitionsmenge	$D_V = [0; 4{,}5]$
	Lösung	$a = h = 3$

6. Hauptbedingung $V = r^2\pi h$

Nebenbedingung $r^2 + \left(\frac{h}{2}\right)^2 = R^2$ (Pythagoras)

$\Rightarrow r^2 = 100 - \left(\frac{h}{2}\right)^2$, hier muss nicht nach r aufgelöst werden, weil man diesen Ausdruck direkt in die Hauptbedingung einsetzen kann.

Zielfunktion $V(h) = 100\pi h - \frac{1}{4}\pi h^3$

Definitionsmenge $D_V = [0; 20]$

Lösung $h = \frac{20\sqrt{3}}{3} \approx 11{,}55;\ r = \frac{10}{3}\sqrt{6} \approx 8{,}16$

7. Hauptbedingung $V = r^2\pi h$

Nebenbedingung $\frac{5-h}{r} = \frac{5}{3}$ (Strahlensatz)

$\Rightarrow h = 5 - \frac{5}{3}r$

Zielfunktion $V(r) = 5r^2\pi - \frac{5}{3}r^3\pi$

Definitionsmenge $D_V = [0; 3]$

Lösung $r = 2;\ h = \frac{5}{3};\ V_{max} = \frac{20}{3}\pi$

8. Hauptbedingung $V = r^2\pi h$

Nebenbedingung $S = r^2\pi + 2r\pi h = 40$ (Oberfläche des Zylinders)

$\Rightarrow h = \frac{40 - r^2\pi}{2r\pi}$

Zielfunktion $V(r) = 20r - \frac{1}{2}r^3\pi$

Definitionsmenge $D_V = \left[0; \sqrt{\frac{40}{\pi}}\right]$

Lösung $r = \sqrt{\frac{40}{3\pi}} \approx 2{,}06$ dm und $h \approx 2{,}06$ dm

9.

a) $f(x) = -\frac{3}{7}x + 3,\ A(a) = a \cdot f(a) = a \cdot \left(-\frac{3}{7}a + 3\right) = -\frac{3}{7}a^2 + 3a,\ D_A = [0; 7]$

b) $A(1) = \frac{18}{7} \approx 2{,}57,\ A(5) = \frac{30}{7} \approx 4{,}29$

c) Maximaler Wert für $a_S = 3{,}5$ mit $A_{max} = \frac{21}{4} = 5{,}25$

10. Hauptbedingung $V = 0{,}5 \cdot b \cdot h$

Nebenbedingung $6h + 2b = 5$ (Länge des Bretts) $\Rightarrow b = 2{,}5 - 3h$

Zielfunktion $V(h) = 1{,}25h - 1{,}5h^2$

Definitionsmenge $D_V = \left[0; \frac{5}{6}\right]$

Lösung $h = \frac{5}{12};\ b = \frac{5}{4}$ und $V_{max} \approx 0{,}26$

11. Hauptbedingung $V = b \cdot h \cdot 12$
Nebenbedingung $\frac{5-h}{b} = \frac{5}{8}$ (Strahlensatz) $\Rightarrow h = \frac{40-5b}{8}$
Zielfunktion $V(b) = -\frac{15}{2}b^2 + 60b$
Definitionsmenge $D_V = [0; 8]$
Lösung $b = 4; V_{max} = 120$

12.

a) Hier gibt es drei sinnvolle Möglichkeiten. Man kann die Normalform $f(x) = ax^2 + bx + c$ einer Parabel benutzen und die beiden Nullstellen sowie den Scheitelpunkt einsetzen. Lösen des entstehenden Gleichungssystems liefert die Behauptung.

Eleganter ist der Ansatz in der Scheitelform, mit der man direkt $f(x) = a(x-5)^2 + 5$ erhält. Einsetzen des Koordinatenursprungs ergibt $a(-5)^2 + 5 = 0$ und damit $a = -\frac{1}{5}$. Ausmultiplizieren von $f(x) = -\frac{1}{5}(x-5)^2 + 5$ ergibt mit $f(x) = -\frac{1}{5}(x^2 - 10x)$ die gesuchte Funktion.

Alternativ mit Hilfe der Nullstellenform: $f(x) = a(x-0)(x-10) = ax(x-10)$
Hier kann z.B. der Scheitelpunkt $S(5; 5)$ eingesetzt werden, um a zu bestimmen:
$a \cdot 5 \cdot (5-10) = 5$, also $a = -\frac{1}{5}$ und $f(x) = -\frac{1}{5}x(x-10) = -\frac{1}{5}(x^2 - 10x)$.

b) Die Breite der Leinwand beträgt 2a, ihre Breite erhalten wir, indem wir den x-Wert $5 + a$ in die Parabelgleichung für x einsetzen. Folglich ist
$A(a) = 2a \cdot f(5+a)$
$= 2a \cdot \left(-\frac{1}{5}\right)\left((5+a)^2 - 10(5+a)\right)$
$= 2a \cdot \left(-\frac{1}{5}\right)(25 + 10a + a^2 - 50 - 10a)$
$= 2a \cdot \left(-\frac{1}{5}\right)(a^2 - 25)$
$= -\frac{2}{5}a^3 + 10a$

Sinnvolle Definitionsmenge ist $D_A = [0; 5]$.

c) $A(2) = 16{,}8$.
Für $a = 2$ (die Leinwand ist dann 4 m breit) beträgt die Fläche der Leinwand $16{,}8\ m^2$.

d) $A'(a) = -1{,}2a^2 + 10$
$A''(a) = -2{,}4a$

$A'(a) = 0 \Leftrightarrow -1{,}2a^2 + 10 = 0$
$a_{1/2} = \pm\sqrt{\frac{10}{1{,}2}} \approx \pm 2{,}89$, wovon nur der positive Wert sinnvoll ist.
$A''(2{,}89) \approx -0{,}69 < 0$, daher handelt es sich um ein lokales Maximum.
Die beiden Randwerte ergeben $A(0) = A(5) = 0$, daher besitzt die Fläche ein absolutes Maximum bei $a_{1/2} = 2{,}89$ m.