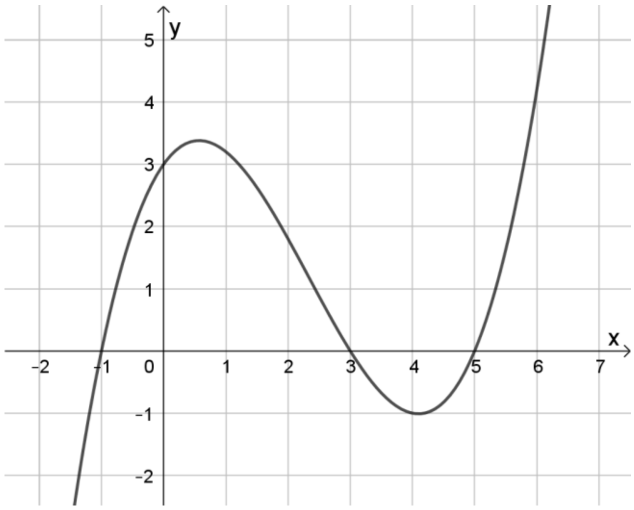
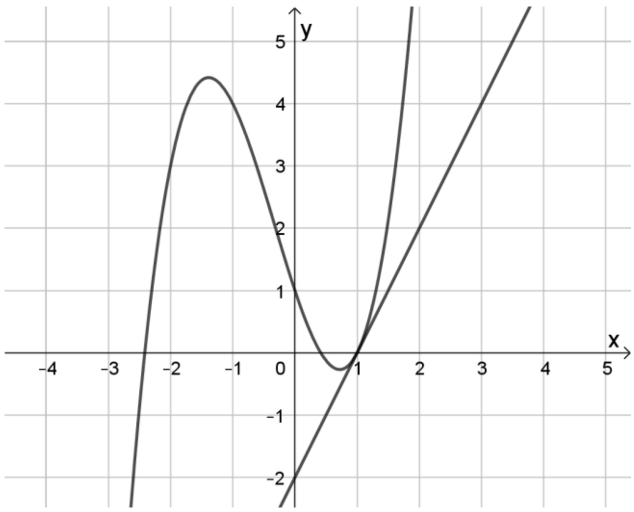
Ganzrationale Funktionen • Steckbriefaufgaben
Übung

1. Bestimmen Sie einen Funktionsterm dritten Grades zu abgebildetem Graphen.



2. In untenstehender Skizze ist der Graph der ganzrationalen Funktion f dritten Grades dargestellt. Die Gerade stellt die Tangente an der Nullstelle bei $x_1 = 1$ dar. Bestimmen Sie den Term von f.



3. Eine ganzrationale Funktion f dritten Grades besitzt einen Graphen, der bei $x_0 = 2$ die Wendetangente mit der Gleichung $3x + y = 6$ besitzt und die y-Achse bei $y_0 = -2$ schneidet. Bestimmen Sie einen Term von f.

4. Der Graph der ganzrationalen Funktion g dritten Grades besitzt im Koordinatenursprung einen Wendepunkt und berührt die Gerade mit $y = \frac{3}{4}x - 1$ bei $x_0 = 2$. Wie lautet die Funktionsgleichung von g?

5. Gesucht ist eine ganzrationale Funktion dritten Grades, deren Graph durch die folgenden Punkte verläuft:
   - $P(-3; 0)$
   - $Q(-1; 8)$
   - $R(2; 0)$
   - $S(0; 6)$

6. Die ganzrationale Funktion f vierten Grades besitzt einen Graphen, der achsensymmetrisch zur y-Achse liegt. Dieser Graph besitzt einen Hochpunkt bei $x_1 = 2$, eine Nullstelle bei $x_2 = 3$ und schneidet die y-Achse bei $y_1 = 1$. Bestimmen Sie den Funktionsterm von f.

7. Erstellen Sie den Term $f(x)$ einer ganzrationalen Funktion vom Grad 4 mit Graph G_f und folgenden Eigenschaften: Die beiden Punkte $P(-1; -3)$ und $Q(1; 2)$ liegen auf G_f. Außerdem besitzt f eine doppelte Nullstelle bei $x_1 = 2$ sowie eine einfache Nullstelle bei $x_2 = -2$.

8. Der Graph der ganzrationalen Funktion f vom Grad 4 besitzt bei $T(1;2)$ einen Terrassenpunkt und eine doppelte Nullstelle bei $x_0 = -3$. Bestimmen Sie ihren Term.

9. Das Längenwachstum einer Honigbiene nach dem Schlüpfen soll mit einer ganzrationalen Funktion 3. Grades beschrieben werden. Die Wachstumsgeschwindigkeit der Biene zu Beginn der Wachstumsphase beträgt 0,6 mm pro Woche und erreicht ihren höchsten Wert nach sieben Tagen. Die vierwöchige Wachstumsphase der Arbeitsbiene endet, wenn die Arbeitsbiene mit 12 mm ihre Maximallänge erreicht hat.
   Verwenden Sie die Variable t für die Zeit in Wochen nach dem Schlüpfen der Honigbiene und L für die aktuelle Länge in Millimetern.

Ganzrationale Funktionen • Steckbriefaufgaben
Lösung

1. Hier ist es sinnvoll, die Linearfaktorzerlegung von f anzusetzen. Mit den drei Nullstellen und dem Schnittpunkt mit der y-Achse erhält man

$$f(x) = \frac{1}{5}(x+1)(x-3)(x-5)$$

2. $f(x) = x^3 + x^2 - 3x + 1$

3. $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 2$

4. $f(x) = \frac{1}{16}x^3$

5.

Allgemeiner Funktionsterm

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \text{ mit } a, b, c, d \in \mathbb{R}$$

Einsetzen der Punkte

$$\begin{array}{lccccccc} \text{I)} & -27a & +9b & -3c & +d & = & 0 \\ \text{II)} & -a & +b & -c & +d & = & 8 \\ \text{III)} & 8a & +4b & +2c & +d & = & 0 \\ \text{IV)} & & & & d & = & 6 \end{array}$$

Lösen des linearen Gleichungssystems (Beispielrechnung)

$$\begin{array}{lccccc} \text{I)} & -27a & +9b & -3c & = & -6 \\ \text{II)} & -a & +b & -c & = & 2 \\ \text{III)} & 8a & +4b & +2c & = & -6 \end{array}$$

$$\begin{array}{lccccc} \text{I)} & -9a & +3b & -c & = & -2 \\ \text{II)} & & 18b & -24c & = & 60 \\ \text{III)} & & 12b & -6c & = & 10 \end{array}$$

$$\begin{array}{lccccc} \text{I)} & -9a & +3b & -c & = & -2 \\ \text{II)} & & 3b & -4c & = & 10 \\ \text{III)} & & & 30c & = & -90 \end{array}$$

$$\Rightarrow c = -3; b = -\frac{2}{3}; a = \frac{1}{3}$$

Darstellen des Funktionsterms

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{2}{3}x^2 - 3x + 6$$

6. $f(x) = -\frac{1}{9}x^4 + \frac{8}{9}x^2 + 1$

7. $f(x) = \frac{1}{2}(x-2)^2(x+2)(x+\frac{1}{3})$

8. $f(x) = \frac{3}{128}x^4 + \frac{1}{32}x^3 - \frac{15}{64}x^2 + \frac{9}{32}x + \frac{243}{128}$

9. $L(t) = at^3 + bt^2 + ct + d$
   $\dot{L}(t) = 3at^2 + 2bt + c$
   $\ddot{L}(t) = 6at + 2b$

   Hinweise: Bei der aktuellen Wachstumsgeschwindigkeit handelt es sich um die erste Ableitung $\dot{L}(t)$ der Wachstumsfunktion $L(t)$. Das Maximum der Wachstumsgeschwindigkeit (Bedingung II) entspricht dann der Nullstelle von $\ddot{L}(t)$. Es ergeben sich die Bedingungen:

   I) $\dot{L}(0) = 0{,}6$
   II) $\ddot{L}(1) = 0$
   II) $L(4) = 12$
   IV) $\dot{L}(4) = 0$

$$L(t) = -\frac{1}{40}t^3 + \frac{3}{40}t^2 + \frac{3}{5}t + 10$$