Gebrochen-rationale Funktionen • Kurvendiskussion I
Übung

Diskutieren Sie die gebrochen-rationale Funktion $f\colon x \mapsto f(x)$ mit dem Funktionsterm

$$f(x) = \frac{12x}{x^2 + 4}$$

auf folgende Kriterien:

1. Maximale Definitionsmenge
2. Symmetrie bezüglich des Koordinatensystems
3. Nullstellen
4. Grenzverhalten an den Rändern der maximalen Definitionsmenge
5. Monotonie und Extrema
6. Krümmung und Wendepunkte
7. Graph im Bereich $x \in [-6{,}6]$

Gebrochen-rationale Funktionen • Kurvendiskussion I
Lösung

$$f(x) = \frac{12x}{x^2 + 4}$$

1. Maximale Definitionsmenge

$D_{max} = \mathbb{R}$, da der Nenner $x^2 + 4$ nicht Null werden kann.

2. Symmetrie bezüglich des Koordinatensystems

$f(-x) = \frac{12(-x)}{(-x)^2+4} = -\frac{12x}{x^2+4} = -f(x)$
Der Funktionsgraph G_f ist daher punktsymmetrisch zum Koordinatenursprung.

3. Nullstellen

$f(x) = 0 \Leftrightarrow x_1 = 0$ (einfach)

4. Grenzverhalten an den Rändern der maximalen Definitionsmenge

$\lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{12x}{x^2+4} = 0$, da der Zählergrad (1) kleiner ist als der Nennergrad (2).
Daher besitzt G_f die x-Achse als waagrechte Asymptote (und nur diese).

5. Monotonie und Extrema

$$f'(x) = \frac{12(-x^2 + 4)}{(x^2 + 4)^2}$$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 12(-x^2 + 4) = 0 \Leftrightarrow x_{2/3} = \pm 2$
Es bestehen damit waagrechte Tangenten an den Stellen $x_2 = -2$ und $x_3 = 2$.

x	$x < -2$	$-2 < x < 2$	$2 < x$
$f'(x)$	$-$	$+$	$-$
G_f	↘	↗	↘

G_f ist streng monoton fallend (smf) in $]-\infty; -2]$ bzw. $[2; \infty[$
und streng monoton steigend (sms) in $[-2; 2]$.

Relatives Minimum bei $TIP(-2; -3)$,
relatives Maximum bei $HOP(2; 3)$.

6. Krümmung und Wendepunkte

$$f''(x) = \frac{24x^3 - 288x}{(x^2+4)^3}$$

$f''(x) = 0 \Leftrightarrow 24x(x^2 - 12) = 0 \Leftrightarrow x_4 = 0; x_{5/6} = \pm\sqrt{12} \approx \pm 3{,}46$

x	$x < -\sqrt{12}$	$-\sqrt{12} < x < 0$	$0 < x < \sqrt{12}$	$x > \sqrt{12}$
$f''(x)$	$-$	$+$	$-$	$+$
G_f	↻	↺	↻	↺

G_f ist rechtsgekrümmt (rk) in $]-\infty; -\sqrt{12}]$ bzw. $[0; \sqrt{12}]$
und linksgekrümmt (lk) in $[-\sqrt{12}; 0]$ bzw. $[\sqrt{12}; \infty[$.

$WEP_1(-3{,}46; -2{,}60)$
$WEP_2(0; 0)$
$WEP_3(3{,}46; 2{,}60)$

7. Graph