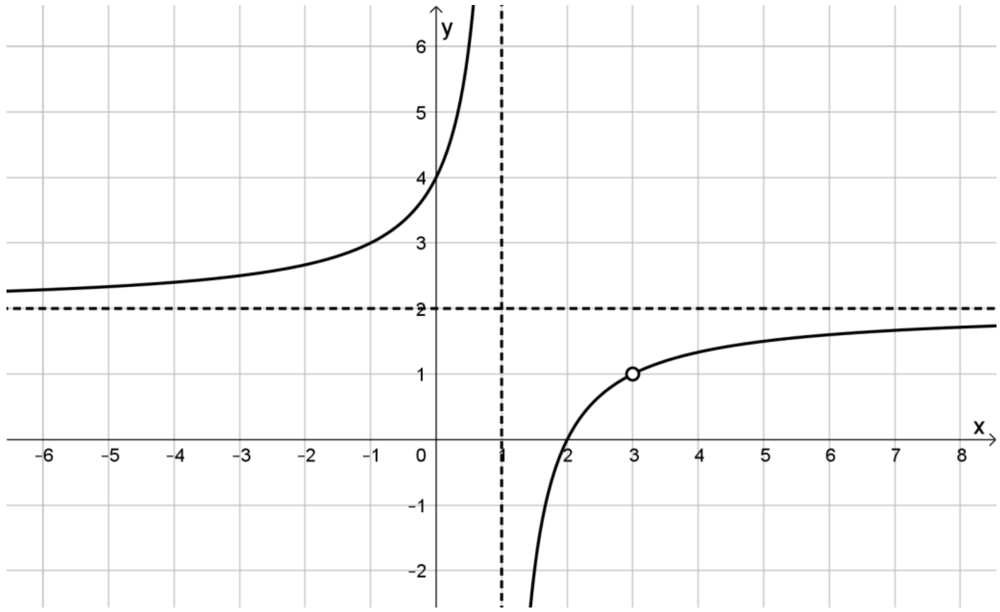
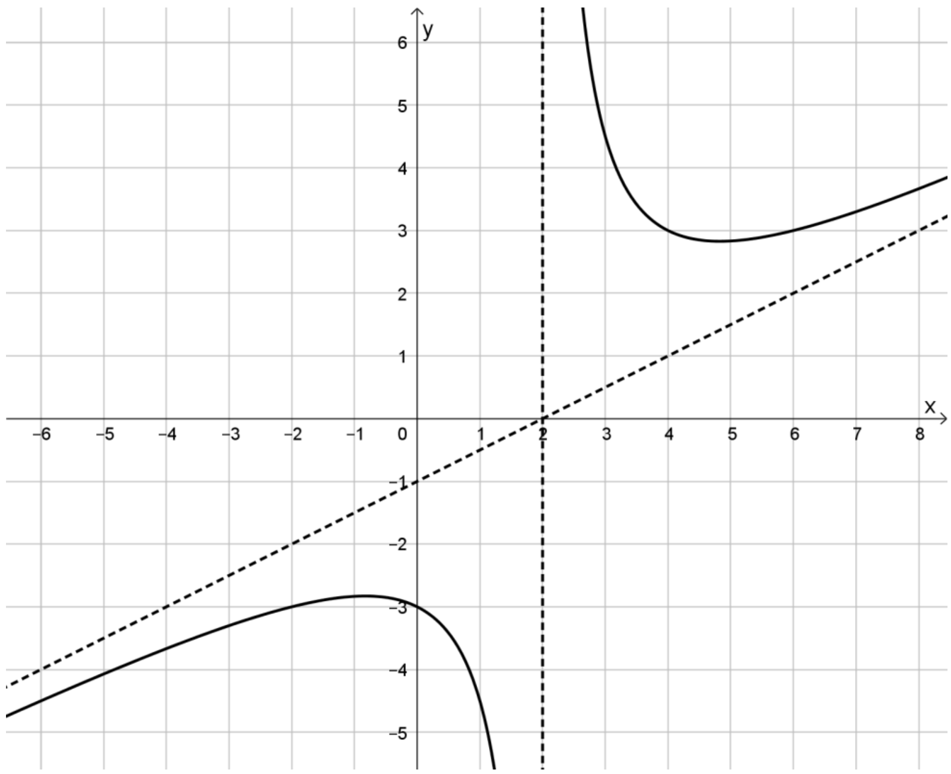
Gebrochen-rationale Funktionen • Steckbriefaufgaben
Übung

1. Bestimmen Sie einen möglichst einfachen Funktionsterm des abgebildeten Graphen. •◦◦



2. Ermitteln Sie den Funktionsterm des abgebildeten Graphen. ••◦



3. Die Funktion f besitzt den Term $f(x) = \frac{x-a}{x-b}$. Geben Sie die reellen Zahlen a und b an, so dass f eine senkrechte Asymptote bei $x_1 = 3$ und eine Nullstelle bei $x_2 = 2$ besitzt. •∘∘

4. Betrachtet wird die Funktion f mit dem Term $f(x) = \frac{2x-a}{x-b}$.
   Bestimmen Sie $a, b \in \mathbb{R}$ so, dass der Graph G_f den Punkt $P(1; 3)$ enthält und dort die Steigung 0,5 besitzt. ••∘

5. Gegeben ist die gebrochen-rationale Funktion $f{:}x \mapsto f(x)$ durch den Term

$$f(x) = \frac{x^2+ax+b}{x^2-4}$$

   mit den beiden Werten $a, b \in \mathbb{R}$. Der Graph G_f von f besitzt eine waagrechte Tangente im Punkt $P(1; 2)$. Ermitteln Sie durch Rechnung die Werte von a und b. ••∘

6. Eine gebrochen-rationale Funktion f besitzt den Nennerterm $n(x) = \frac{1}{2}x^2 + 2x + 4$. Es existieren eine waagrechte Asymptote mit der Gleichung $y = 0$. Außerdem enthält der Graph der Funktion f den Koordinatenursprung sowie den Punkt $P(2; 1)$. Ermitteln Sie den Funktionsterm von f. ••∘

7. Eine Funktion f mit dem Term der Form $f(x) = \frac{ax^2+b}{x^2+c}$ besitzt eine Polstelle bei $x_1 = 1$, eine Nullstelle bei $x_2 = 2$ und bei $x_3 = 3$ die Steigung $\frac{9}{16}$.
   Bestimmen sie die Werte von $a, b \in \mathbb{R}$. ••∘

8. Gegeben ist die gebrochen-rationale Funktion $f(x) = \frac{x^3+x-6}{n(x)}$ mit unbekanntem Nennerpolynom $n(x)$ vom Grad 2. Finden Sie den Term dieses Polynoms, wenn bekannt ist, dass $x_0 = 1$ eine Polstelle von f ist und die schräge Asymptote des Graphen die Gleichung $y = x - 3$ besitzt. •••

Gebrochen–rationale Funktionen • Steckbriefaufgaben
Lösung

1. $f(x) = \frac{2(x-2)(x-3)}{(x-1)(x-3)}$. Die einzelnen Teile des Terms können wie folgt begründet werden:

    - Der Faktor 2 existiert wegen der waagrechten Asymptote $y = 2$. Diese hat auch zur Folge, dass Zähler- und Nennergrad identisch (in diesem Fall 2) sein müssen.
    - $(x-2)$ enthält die Nullstelle $x = 2$ der Funktion f.
    - Die Klammern $(x-3)$ stehen in Zähler und Nenner, weil bei $x = 3$ ein „Loch“, also eine hebbare Definitionslücke, vorliegt.
    - Bei $x = 1$ liegt eine Polstelle/senkrechte Asymptote vor, folglich steht $(x-1)$ im Nenner.

2. Aus den beiden Asymptoten mit den Gleichungen $x = 2$ (senkrecht) und $y = \frac{1}{2}x - 1$ (schräg) kann bereits auf $f(x) = \frac{1}{2}x - 1 + \frac{c}{x-2}$ geschlossen werden. Andere Ansätze sind weit weniger praktikabel.

    Den Wert von c findet man durch Einsetzen eines Punkts auf dem Graphen, z.B. $S(0;-3)$: $\frac{1}{2} \cdot 0 - 1 + \frac{c}{0-2}$, dies ergibt $c = 4$ und damit $f(x) = \frac{1}{2}x - 1 + \frac{4}{x-2}$.

3. $a = 2$ und $b = 3$.

4. $f'(x) = \frac{(x-b)\cdot 2-(2x-a)\cdot 1}{(x-b)^2} = \frac{2x-2b-2x+a}{(x-b)^2} = \frac{a-2b}{(x-b)^2}$.

    Aus der Angabe können zwei Bedingungen herausgelesen werden.

    I) $f(1) = 3 \Rightarrow \frac{2-a}{1-b} = 3 \Rightarrow 2 - a = 3 - 3b$
    II) $f'(1) = 0{,}5 \Rightarrow \frac{a-2b}{(1-b)^2} = 0{,}5$

    I) $a = 3b - 1$
    II) $a - 2b = 0{,}5 \cdot (1-b)^2$

    a aus I) eingesetzt in II) und vereinfacht liefert $b^2 - 4b + 3 = 0$ mit den Lösungen

    $[b_1 = 1]$ (kann nicht sein, da sonst bei $x = 1$ eine Definitionslücke vorliegen würde.)
    $b_2 = 3$.

    Damit ist $b = 3$ und $a = 8$.

5. $f'(x) = \frac{-(ax^2+2bx+8x+4a)}{(x^2-4)^2}$.

   Die Bedingungen

   I) $f(1) = 2$ und
   II) $f'(1) = 0$

   Führen zum Ergebnis $a = 2$, $b = -9$.

6. Wegen der Asymptote $y = 0$ kann der Zählergrad höchstens eins sein, also $z(x) = ax + b$. Da der Koordinatenursprung auf G_f liegt, ist $b = 0$. Einsetzen von P liefert $a = 5$. Damit ist $f(x) = \frac{5x}{\frac{1}{2}x^2+2x+4}$.

7. $f'(x) = \frac{2acx-2bx}{(x^2+c)^2}$.

   $a = 2$, $b = -8$ und $c = -1$.

8. Wegen der Polstelle liegt bei $x_0 = 1$ eine Nullstelle im Nenner vor. Daher lautet der Ansatz für das Nennerpolynom

$$n(x) = (x-1) \cdot (ax+b) = ax^2 + (b-a) \cdot x - b.$$

   Folgende Gleichung muss nach Polynomdivision gelten:

$$(x^3 + x - 6) : (ax^2 + (b-a) \cdot x - b) = x - 3 + \frac{R(x)}{ax^2+(b-a)\cdot x-b},$$

   weil der ganzrationale Teil der rechten Seite dem Term der schrägen Asymptote $x - 3$ entsprechen muss. Dabei ist $R(x)$ ein nicht bekannter Restterm der Division. Koeffizientenvergleich im ersten Schritt der Division begründet, dass wegen $x^3 : ax^2 = x$ der Wert $a = 1$ sein muss. Die Gleichung vereinfacht sich deshalb zu

$$(x^3 + x - 6) : (x^2 + (b-1) \cdot x - b) = x - 3 + \frac{R(x)}{x^2+(b-1)\cdot x-b}.$$

   Im zweiten Schritt der Division muss b so bestimmt werden, dass $-(b-1) = -3$, also $b = 4$.

   Damit lautet $n(x) = (x-1)(x+4) = x^2 + 3x - 4$.