Integration gebrochen-rationaler Funktionen
Übung

1. Geben Sie eine Stammfunktion zu f an.

a) $f(x) = \frac{1}{x+2}$ b) $f(x) = \frac{1}{3x}$ c) $f(x) = \frac{1}{2x+1}$

d) $f(x) = \frac{x^2-x+1}{x}$ e) $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$ f) $f(x) = \frac{x^2+3x+2}{x+2}$

2. Schreiben Sie integralfrei!

a) $\int \frac{2}{x}\,dx$ b) $\int x - \frac{1}{x^2}\,dx$ c) $\int \frac{x^3+x^2+x+2}{x+1}\,dx$

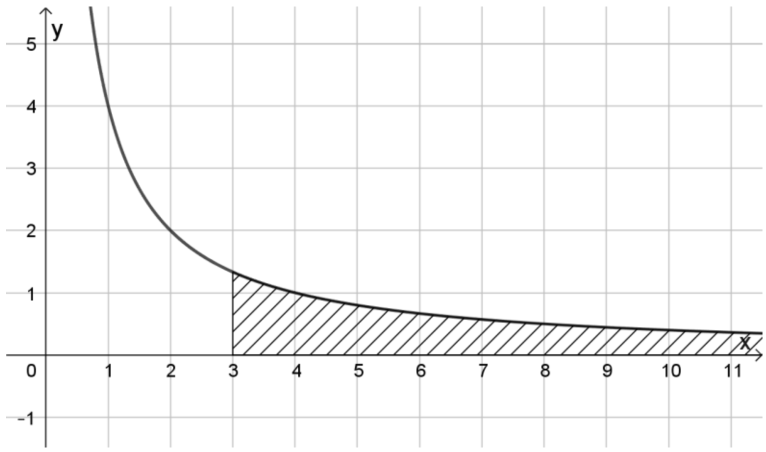
d) $\int x + \frac{x^2+x-1}{x+2}\,dx$ e) $\int \frac{x^2+2x+1}{x^2+1}dx$ f) $\int \frac{x^3-2x^2-2}{x^2+x+1}\,dx$

3. Berechnen Sie den Wert des bestimmten Integrals.

a) $\int_1^2 \frac{1}{x-3}\,dx$ b) $\int_0^1 \frac{4x+8}{x^2+4x+1}\,dx$ c) $\int_0^4 \frac{1}{x+5}\,dx$

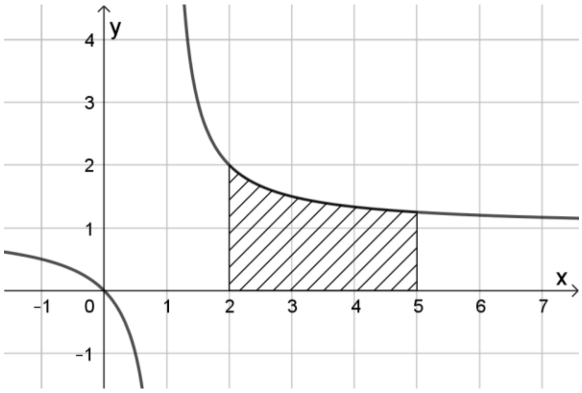
d) $\int_1^2 \frac{3x^2-x}{x+1}\,dx$ e) $\int_1^2 \frac{x^2+x+1}{x+3}dx$ f) $\int_1^e \frac{3x^2+2x+1}{x+3}dx$

4. Der Graph zeigt die Funktion $f(x) = \frac{4}{x}$. Überprüfen Sie, ob sich das ins Unendliche erstreckende, schraffierte Flächenstück einen endlichen Inhalt besitzt.

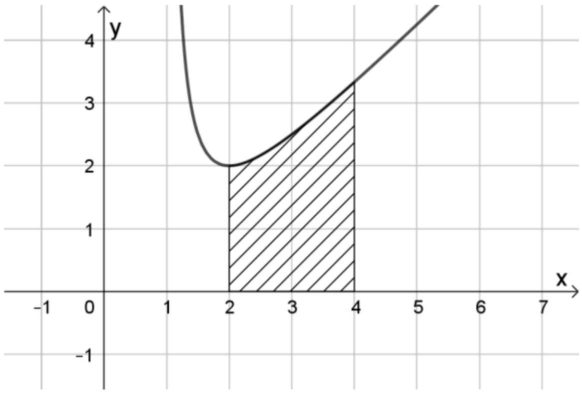


5. Berechnen Sie die Maßzahl der gekennzeichneten Fläche.

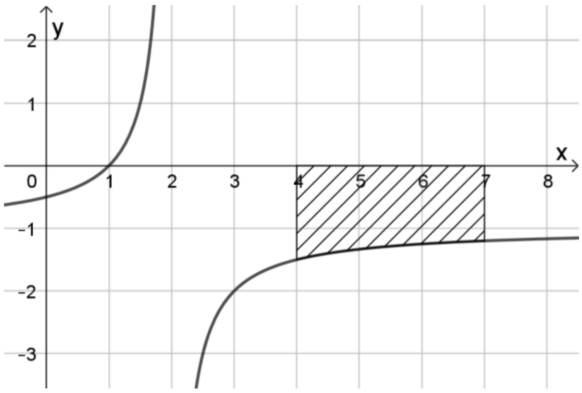
a) $f(x) = \frac{x}{x-1}$



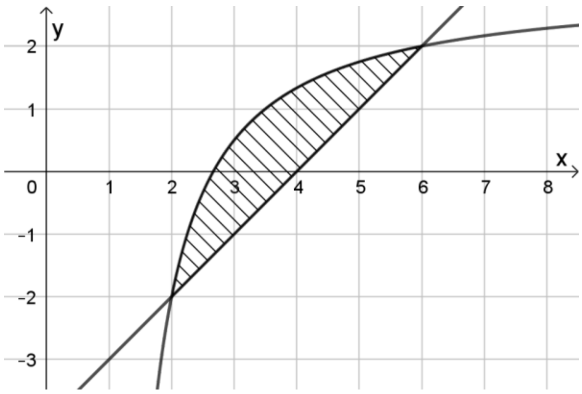
b) $g(x) = \frac{x^2-2x+2}{x-1}$,



c) $h(x) = \frac{x-1}{2-x}$



d) $i(x) = \frac{-5}{x+1} + 3$ und $j(x) = x - 4$



Integration gebrochen-rationaler Funktionen
Lösung

1.
   a) Beispielsweise $F(x) = \ln|x+2|$
   b) Zum Beispiel $F(x) = \frac{1}{3}\ln|x|$
   c) $f(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{2x+1}$, also z.B. $F(x) = \frac{1}{2}\ln|2x+1|$
   d) $f(x) = x - 1 + \frac{1}{x}$, also z.B. $F(x) = \frac{1}{2}x^2 - x + \ln|x|$
   e) Nach Polynomdivision ist $f(x) = 1 + \frac{2}{x-1}$, also z.B. $F(x) = x + 2 \cdot \ln|x-1|$
   f) $(x^2 + 3x + 2) : (x + 2) = x + 1$, also z.B. $F(x) = \frac{1}{2}x^2 + x$ in $D = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$

2.
   a) $2 \cdot \ln|x| + c$
   b) $\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{x} + c$, Hinweis: Hier kann der ln nicht für die Bildung der Stammfunktion verwendet werden, sondern die Potenzregel!
   c) $\int \frac{x^3+x^2+x+2}{x+1}\,dx = \int x^2 + 1 + \frac{1}{x+1}\,dx = \frac{1}{3}x^3 + x + \ln|x+1| + c$
   d) $\int x + \frac{x^2+x-1}{x+2}\,dx = \int x + x - 1 + \frac{1}{x+2}\,dx = \int 2x - 1 + \frac{1}{x+2}\,dx = x^2 - x + \ln|x+2| + c$
   e) $\int \frac{x^2+2x+1}{x^2+1}\,dx = \int 1 + \frac{2x}{x^2+1}\,dx = x + \ln|x^2+1| + c$
   f) $\int \frac{x^3-2x^2-2}{x^2+x+1}\,dx = \int x - 3 + \frac{2x+1}{x^2+x+1}\,dx = \frac{1}{2}x^2 - 3x + \ln|x^2+x+1| + c$

3.
   a) $\ln|-1| - \ln|-2| = -\ln(2) \approx -0{,}69$
   b) $2 \cdot \ln(6) \approx 3{,}58$
   c) $\ln(9) - \ln(5) \approx 0{,}59$
   d) Es ist $(3x^2 - x) : (x+1) = 3x - 4 + \frac{4}{x+1}$, das Integrals ergibt $\frac{1}{2} + 4 \cdot \ln\left(\frac{3}{2}\right) \approx 2{,}12$
   e) $-\frac{1}{2} + 7\ln\left(\frac{5}{4}\right) \approx 1{,}06$
   f) $3e^2 - 7e + 4 + 22 \cdot \ln\left(\frac{e+3}{4}\right) \approx 15{,}00$

4. Das uneigentliche Integral $\int_3^\infty \frac{4}{x}\,dx$ muss überprüft werden.
   $\int_3^\infty \frac{4}{x}\,dx = [\ln|x|]_3^\infty = \lim\limits_{x\to\infty} \ln(x) - \ln(3) = \infty$, der Flächeninhalt ist **nicht** endlich.

5.
   a) $A = 3 + \ln(4) \approx 4{,}39$ FE
   b) $A = 4 + \ln(3) \approx 5{,}10$ FE
   c) $A = -\int_4^7 \frac{x-1}{2-x}\,dx$
   $= -\int_4^7 -1 - \frac{-1}{-x+2}\,dx$
   $= [x + \ln|2-x|]_4^7$
   $= 7 + \ln(5) - 4 - \ln(2) = 3 + \ln\left(\frac{5}{2}\right) \approx 3{,}92$ FE
   d) $A = \int_2^6 \frac{-5}{x-1} + 3 - (x-4)\,dx = \int_2^6 -x + 7 - 5 \cdot \frac{1}{x-1}\,dx$
   $= \left[-\frac{1}{2}x^2 + 7x - 5 \cdot \ln|x-1|\right]_2^6 = 12 - 5 \cdot \ln(5) \approx 3{,}95$ FE