Lineare Gleichungssysteme (drei Unbekannte) mit Parameter
Übung

1. Bestimmen Sie $a \in \mathbb{R}$ so, dass das Gleichungssystem unlösbar ist. •◦◦

a) $$\begin{array}{lrrrcr} \text{I)} & 2x_1 & -x_2 & +x_3 & = & 3 \\ \text{II)} & x_1 & +x_2 & +2x_3 & = & 1 \\ \text{III)} & 3x_1 & -2x_2 & +ax_3 & = & 5 \end{array}$$

b) $$\begin{array}{lrrrcr} \text{I)} & x_1 & +2x_2 & -x_3 & = & 2 \\ \text{II)} & & ax_2 & +2x_3 & = & 2 \\ \text{III)} & 2x_1 & +4x_2 & +x_3 & = & 1 \end{array}$$

2. Ermitteln Sie den Parameter $b \in \mathbb{R}$ so, dass das Gleichungssystem unendlich viele Lösungen besitzt. •◦◦

a) $$\begin{array}{lrrrcr} \text{I)} & x_1 & +x_2 & +2x_3 & = & 2 \\ \text{II)} & 2x_1 & +x_2 & +2x_3 & = & 1 \\ \text{III)} & 2x_1 & & +bx_3 & = & -2 \end{array}$$

b) $$\begin{array}{lrrrcr} \text{I)} & 3x_1 & +2x_2 & & = & 1 \\ \text{II)} & 6x_1 & +2x_2 & +(b+3)x_3 & = & -2 \\ \text{III)} & -x_1 & +x_2 & & = & 3 \end{array}$$

3. Durch folgende Matrizen sind Gleichungssysteme dargestellt. Geben Sie die Anzahl der Lösungen in Abhängigkeit vom Parameter $c \in \mathbb{R}$ an. ••◦

a) $$\left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 0 & 0 & 10 \\ 0 & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 6 \end{array}\right)$$

b) $$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 4 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & c+5 \end{array}\right)$$

c) $$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & c^2-4 & c-2 \end{array}\right)$$

4. Lösen Sie die folgenden linearen Gleichungssysteme in Abhängigkeit von $a \in \mathbb{R}$. ••◦

a) $$\begin{array}{lrrcr} \text{I)} & x & +2y & = & 2 \\ \text{II)} & & ay & = & 0 \end{array}$$

b) $$\begin{array}{lrrcr} \text{I)} & ax & -y & = & 2 \\ \text{II)} & -3x & +3y & = & -5 \end{array}$$

c) $$\begin{array}{lrrrcr} \text{I)} & -x_1 & & +3x_3 & = & 2 \\ \text{II)} & & +2x_2 & +x_3 & = & 2 \\ \text{III)} & & & +(a-4)x_3 & = & 0 \end{array}$$

d) $$\begin{array}{lrrrcr} \text{I)} & 2x_1 & +x_2 & & = & 1+2a \\ \text{II)} & 2x_1 & +3x_2 & +3x_3 & = & 2-3a \\ \text{III)} & 4x_1 & +3x_2 & +2x_3 & = & 3 \end{array}$$

e) $$\begin{array}{lrrrcr} \text{I)} & 2x_1 & -4x_2 & +x_3 & = & 3 \\ \text{II)} & x_1 & +2x_2 & +2x_3 & = & 1 \\ \text{III)} & 3x_1 & -2x_2 & +ax_3 & = & 5 \end{array}$$

f) $$\begin{array}{lrrrcr} \text{I)} & x_1 & +2x_2 & +x_3 & = & a \\ \text{II)} & 2x_1 & +6x_2 & +5x_3 & = & 4 \\ \text{III)} & x_1 & +6x_2 & +7x_3 & = & 2a-2 \end{array}$$

5. Bestimmen sie die Werte des Parameters $a \in \mathbb{R}$, für die das folgende Gleichungssystem keine, eine bzw. unendlich viele Lösungen besitzt. •••

$$\begin{array}{rrrcr} 2x_1 & -ax_2 & +2x_3 & = & 2 \\ -x_1 & +x_2 & +(a-1)x_3 & = & 2 \\ x_1 & -3x_2 & +x_3 & = & 1 \end{array}$$

Lineare Gleichungssysteme (drei Unbekannte) mit Parameter
Lösung

1.
   a) Das Gleichungssystem ist unlösbar für $a = 1$.
   b) System unlösbar für $a = 0$.

2.
   a) Für $b = 0$ existieren unendlich viele Lösungen.
   b) Für $b = -3$ existieren unendlich viele Lösungen.

3.
   a) Für $c = 0$ existieren unendlich viele Lösungen, für $c \neq 0$ eine Lösung.
   [Hinweis: Die Lösungsmenge $L = \{(2; 0; 2)\}$ ist für diesen Fall nicht verlangt]
   b) $c = -5$: Unendlich viele Lösungen
   $c \neq -5$: keine Lösung
   c) $c = -2$: keine Lösung
   $c = 2$: unendlich viele Lösungen
   $c \in \mathbb{R} \setminus \{-2; 2\}$: eine Lösung

4.
   a) 1. Fall: $a = 0$
   unendlich viele Lösungen
   z.B. $L = \left\{(x; y) \,\middle|\, y = -\frac{1}{2}x + 1 \wedge x \in \mathbb{R}\right\}$

   2. Fall: $a \neq 0$
   $L = \{(2; 0)\}$

   b) 1. Fall: $a = 1$
   Widerspruch
   $L = \emptyset$

   2. Fall: $a \neq 1$
   $L = \left\{\left(\frac{1}{3a-3}; \frac{-5a+6}{3a-3}\right)\right\}$

   c) 1. Fall: $a = 4$
   unendlich viele Lösungen
   $L = \left\{(x_1; x_2; x_3) \,\middle|\, x_1 = -2 + 3x_3 \wedge x_2 = 2 - \frac{1}{2}x_3 \wedge x_3 \in \mathbb{R}\right\}$

   2. Fall: $a \neq 4$
   $L = \{(-2; 1; 0)\}$

   d) $L = \{(1; -1 + 2a; 1 - 3a)\}$

e) 1. Fall: $a = 3$
Widerspruch
$L = \emptyset$

2. Fall: $a \neq 3$
eine (von a abhängige) Lösung $L = \left\{\left(\frac{5(a-4)}{4(a-3)}; \frac{-a}{8(a-3)}; \frac{1}{a-3}\right)\right\}$

f) 1. Fall: $a = 2$
Unendlich viele Lösungen
$L = \left\{(x_1; x_2; x_3) \,\middle|\, x_1 = 3a - 4 - 4x_3 \wedge x_2 = 2 - a - \frac{3}{2}x_3 \wedge x_3 \in \mathbb{R}\right\}$

2. Fall: $a \neq 2$
Widerspruch
$L = \emptyset$

5.

1. Fall: $a \in \mathbb{R} \setminus \{0; 6\}$	genau eine Lösung
2. Fall: $a = 0$	keine Lösung
3. Fall: $a = 6$	unendlich viele Lösungen