Lineare Gleichungssysteme (drei Unbekannte) • Parameter
Übung

1. Bestimmen Sie $a \in \mathbb{R}$ so, dass das Gleichungssystem unlösbar ist. •∘∘

a) $\begin{array}{lrrrcr} \text{I)} & 2x_1 & -x_2 & +x_3 & = & 3 \\ \text{II)} & x_1 & +x_2 & +2x_3 & = & 1 \\ \text{III)} & 3x_1 & -2x_2 & +ax_3 & = & 5 \end{array}$

b) $\begin{array}{lrrrcr} \text{I)} & x_1 & +2x_2 & -x_3 & = & 2 \\ \text{II)} & & ax_2 & +2x_3 & = & 2 \\ \text{III)} & 2x_1 & +4x_2 & +x_3 & = & 1 \end{array}$

2. Ermitteln Sie den Parameter $b \in \mathbb{R}$ so, dass das Gleichungssystem unendlich viele Lösungen besitzt. •∘∘

a) $\begin{array}{lrrrcr} \text{I)} & x_1 & +x_2 & +2x_3 & = & 2 \\ \text{II)} & 2x_1 & +x_2 & +2x_3 & = & 1 \\ \text{III)} & 2x_1 & & +bx_3 & = & -2 \end{array}$

b) $\begin{array}{lrrrcr} \text{I)} & 3x_1 & +2x_2 & & = & 1 \\ \text{II)} & 6x_1 & +2x_2 & +(b+3)x_3 & = & -2 \\ \text{III)} & -x_1 & +x_2 & & = & 3 \end{array}$

3. Durch folgende Matrizen sind Gleichungssysteme dargestellt. Geben Sie die Anzahl der Lösungen in Abhängigkeit vom Parameter $c \in \mathbb{R}$ an. ••∘

a) $\left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 0 & 0 & 10 \\ 0 & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 6 \end{array}\right)$

b) $\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 4 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & c+5 \end{array}\right)$

c) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & c^2-4 & c-2 \end{array}\right)$

4. Lösen Sie die folgenden linearen Gleichungssysteme in Abhängigkeit von $a \in \mathbb{R}$. ••∘

a) $\begin{array}{lrrcr} \text{I)} & x & +2y & = & 2 \\ \text{II)} & & ay & = & 0 \end{array}$

b) $\begin{array}{lrrcr} \text{I)} & ax & -y & = & 2 \\ \text{II)} & -3x & +3y & = & -5 \end{array}$

c) $\begin{array}{lrrrcr} \text{I)} & -x_1 & & +3x_3 & = & 2 \\ \text{II)} & & +2x_2 & +x_3 & = & 2 \\ \text{III)} & & & +(a-4)x_3 & = & 0 \end{array}$

d) $\begin{array}{lrrrcr} \text{I)} & 2x_1 & +x_2 & & = & 1+2a \\ \text{II)} & 2x_1 & +3x_2 & +3x_3 & = & 2-3a \\ \text{III)} & 4x_1 & +3x_2 & +2x_3 & = & 3 \end{array}$

e) $\begin{array}{lrrrcr} \text{I)} & 2x_1 & -4x_2 & +x_3 & = & 3 \\ \text{II)} & x_1 & +2x_2 & +2x_3 & = & 1 \\ \text{III)} & 3x_1 & -2x_2 & +ax_3 & = & 5 \end{array}$

f) $\begin{array}{lrrrcr} \text{I)} & x_1 & +2x_2 & +x_3 & = & a \\ \text{II)} & 2x_1 & +6x_2 & +5x_3 & = & 4 \\ \text{III)} & x_1 & +6x_2 & +7x_3 & = & 2a-2 \end{array}$

5. Bestimmen sie die Werte des Parameters $a \in \mathbb{R}$, für die das folgende Gleichungssystem keine, eine bzw. unendlich viele Lösungen besitzt. •••

$$\begin{array}{cccccc} 2x_1 & -ax_2 & +2x_3 & = & 2 \\ -x_1 & +x_2 & +(a-1)x_3 & = & 2 \\ x_1 & -3x_2 & +x_3 & = & 1 \end{array}$$

Lineare Gleichungssysteme (drei Unbekannte) • Parameter
Lösung

1.
- a) Das Gleichungssystem ist unlösbar für $a = 1$.
- b) System unlösbar für $a = 0$.

2.
- a) Für $b = 0$ existieren unendlich viele Lösungen.
- b) Für $b = -3$ existieren unendlich viele Lösungen.

3.
- a) Für $c = 0$ existieren unendlich viele Lösungen, für $c \neq 0$ keine Lösung. [Hinweis: Die Lösungsmenge $L = \{(2; 0; 2)\}$ ist hier nicht verlangt]
- b) $c = -5$: Unendlich viele Lösungen
  $c \neq -5$: keine Lösung
- c) $c = -2$: keine Lösung
  $c = 2$: unendlich viele Lösungen
  $c \in \mathbb{R} \setminus \{-2; 2\}$: eine Lösung

4.
- a) 1. Fall: $a = 0$
  unendlich viele Lösungen
  z.B. $L = \left\{(x; y) \,\middle|\, y = -\frac{1}{2}x + 1 \wedge x \in \mathbb{R}\right\}$

  2. Fall: $a \neq 0$
  $L = \{(2; 0)\}$

- b) 1. Fall: $a = 1$
  Widerspruch
  $L = \emptyset$

  2. Fall: $a \neq 1$
  $L = \left\{\left(\frac{1}{3a-3}; \frac{-5a+6}{3a-3}\right)\right\}$

- c) 1. Fall: $a = 4$
  unendlich viele Lösungen
  $L = \left\{(x_1; x_2; x_3) \,\middle|\, x_1 = -2 + 3x_3 \wedge x_2 = 2 - \frac{1}{2}x_3 \wedge x_3 \in \mathbb{R}\right\}$

  2. Fall: $a \neq 4$
  $L = \{(-2; 1; 0)\}$

- d) $L = \{(1; -1 + 2a; 1 - 3a)\}$

e) 1. Fall: $a = 3$
Widerspruch
$L = \emptyset$

2. Fall: $a \neq 3$
eine (von a abhängige) Lösung $L = \left\{\left(\frac{5(a-4)}{4(a-3)}; \frac{-a}{8(a-3)}; \frac{1}{a-3}\right)\right\}$

f) 1. Fall: $a = 2$
Unendlich viele Lösungen
$L = \left\{(x_1; x_2; x_3) \,\middle|\, x_1 = 3a - 4 - 4x_3 \wedge x_2 = 2 - a - \frac{3}{2}x_3 \wedge x_3 \in \mathbb{R}\right\}$

2. Fall: $a \neq 2$
Widerspruch
$L = \emptyset$

5.

1. Fall: $a \in \mathbb{R} \setminus \{0; 6\}$	genau eine Lösung
2. Fall: $a = 0$	keine Lösung
3. Fall: $a = 6$	unendlich viele Lösungen